

見せかけの因果

—モンテ・カルロ実験による—

橋 本 次 郎

1. はじめに

1970、1980年代、時系列分析の隆盛の中で、マクロ経済データの時系列的性質をテストすることが精力的に行われた。失業率、利子率、為替レートや株価など一部の系列を除く多くのマクロ経済データは時と共に増加傾向を示す系列が多く、単位根の検定によって、定常性を満たしている系列は少ないことが明らかになった。次にそれらの非定常な時系列は階差モデルに適合する時系列なのかトレンドモデルに適合する時系列なのかが議論の焦点となり、再度各種の単位根の検定作業が行われ、階差モデルに従う時系列が大勢を示す事が分かってきた¹⁾。時系列分析では1変量の分析であろうが多変量であろうが、分析対象となる変数には定常性が保証されていることが前提である。そのため非定常時系列の回帰分析には本来無関係同志の変数間であっても見せかけの回帰現象が生じることが実証的にも理論的にも確認され、伝統的計量経済学が行う通常回帰分析の在り方に疑問が投げかけられている²⁾。もう一方で伝統的計量経済学で行われる恣意的な外生変数の想定に対して疑問が投げかけられ、時系列分析の応用として変数間の因果テストの重要性が指摘されてきた。この因果テストはGranger (1969)の因果テストと呼ばれている。当然この因果テストは定常時系列同志がその前提であるが、今までに非定常時系列をそのままテストした場合の結果に対する分析評価がなされてこなかった。そこで非定常の時系列同士の場合、因果分析においても当然見せかけの因果関係が予想されるが、近年多変量の時系列分析において、変数の外生性、その基礎となる変数間の因果テスト等の事前テストの重要性が増してきたことから、確認の意味でどのような状態の時に見せかけの因果関係が生じるのかをモンテ・カルロ実験で種々実験してみる。実験の結果は平均ゼロ、分散1の正規乱数から生成された互いに独立的な時系列であっても、それが非定常時系列であれば、見せかけの因果は生じる。その生じる割合はランダム・ウォークモデルよりもドリフト付きランダム・ウォーク（最も簡単な階差モデル）、ドリフト付きランダム・ウォークよりもトレンド

¹⁾ Nelson and Plosser (1982) はマクロ経済時系列のトレンド要因による非定常性を判断するのに、確定的 (deterministic)トレンドに従う系列か、あるいは確率的 (stochastic)トレンドに従う系列かという2つの仮説を立て、単位根検定によって確率的トレンドに従う時系列、すなわち階差モデルのプロセスを示す時系列が多いことを明らかにした。

²⁾ いわゆる Spurious Regression の問題は Granger and Newbold (1974) で初めて取り上げられた。非定常なマクロ経済時系列データ同志の安易な回帰分析には見せかけ上良好な推定結果になることが多いと大きな警告を与えた。Phillips (1986) はこの問題について漸近理論を用いて理論的に解明した。

モデルのほうが多くなるというものである。すなわち2変数間のトレンド要因を媒介とした相関が強くなればなるほど、見せかけの因果関係も生じやすくなる。

通常見せかけの因果（あるいは相関）関係を議論する時は、単なる2変数ではなく第3の変数を考慮に入れて、その中から2変数間で直接的原因（あるいは相関）、間接的原因、見せかけの原因が議論される。特に見せかけの原因は2変数間に因果が無くても、それら2変数が第3の変数への因果の方向や構造が共に似ていることから生じる。しかし本稿で調べる因果テストは確率的には独立の定常時系列同志間あるいは非定常時系列同志間の見せかけの因果関係である。非定常時系列同志間の因果テストではトレンド要因が強くなるにつれて、見せかけの因果が生じる割合が大きくなることから、非定常の主要要因であるトレンドが共に介在しての見せかけの因果と判断することができる。

本稿の構成は、第2節でGrangerの因果関係の説明とテスト方法を述べる。第3節では、テストの前提となるホワイト・ノイズ（平均ゼロ、分散1の正規乱数）系列³⁾から定常なARモデル、ランダム・ウォークモデル、ドラフト付きランダム・ウォーク（階差モデル）、トレンドモデルにしたがって生成される各種時系列の姿を概観する。第4節では、第3節で取り上げた時系列に対して見せかけの因果がどのように生じるのかがモンテ・カルロ実験で検証される。ここでは時系列の長さは $T = 100$ であり、各系列間の因果テスト結果がそれぞれ5000回の繰返し実験から因果関係の分類ごとにその回数がまとめられている。なお本稿における実験計算はTSPのバージョン4.4が使用されている。

2. Grangerの因果関係とそのテスト方法

Grangerの因果テストは多変量間での因果テストも考えられるが、基本的スタイルは2変数間である。本稿では山本(1988)⁴⁾を参考にして、2変量のVAR(p)モデルに基づいて因果テスト方法を提示する。2変量のVAR(p)モデルの場合は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} x_t &= a_1 x_{t-1} + \cdots + a_p x_{t-p} + b_1 z_{t-1} + \cdots + b_p z_{t-p} + u_{1t} \\ z_t &= c_1 x_{t-1} + \cdots + c_p x_{t-p} + d_1 z_{t-1} + \cdots + d_p z_{t-p} + u_{2t} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 a_i, b_i, c_i, d_i はパラメータ（定数）である。 $\mathbf{u}_t = [u_{1t}, u_{2t}]'$ はホワイト・ノイズ・ベクトルである。 t 時点における2変量 (x_t, z_t) の利用可能な現在および過去の情報集合を $I_t = \{x_s, z_s\}$ と表す。現在をあらわす t 時点を除いて、 $(t-1)$ 期までの利用可能な情報 I_{t-1} とし、それが与えられたときの x_t の最適予測を予測の平均二乗誤差が最小になったものとして、 $\sigma^2(x_t | I_{t-1})$ と表示すれば、その時の最適予測を表す x_t の式は次式となる。

$$x_t = a_1 x_{t-1} + \cdots + a_p x_{t-p} + b_1 z_{t-1} + \cdots + b_p z_{t-p} \quad (2)$$

³⁾ ホワイト・ノイズは定常な確率過程の中で最も簡単なもので、平均が0分散が σ^2 であり、すべての自己共分散（したがって自己相関）が0の確率過程である。本稿では平均0、分散1で共分散0の正規乱数を取り扱うことにした。

⁴⁾ 山本(1988)の第9章「Grangerの因果関係」には、Granger(1969)の因果関係の概念とテスト方法だけでなく、その後開発された検証方法を各種紹介しているので参考になる。

さてこの時、もし真のモデル(2)において

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

なる条件があれば、 x_t の $(t-1)$ 期までの情報は $\sigma^2(x_t | I_{t-1} - \bar{z}_{t-1})$ となり、その時の最適予測は次式となる。

$$x_t = a_1 x_{t-1} + \dots + a_p x_{t-p}$$

この場合には、 x_t の最適予測にとって z_t の過去の情報は不用である。ゆえに

$$\sigma^2(x_t | I_{t-1}) = \sigma^2(x_t | I_{t-1} - \bar{z}_{t-1}) \quad (3)$$

である。一方、モデル(2)において $b_k \neq 0$ ならば、

$$\sigma^2(x_t | I_{t-1}) < \sigma^2(x_t | I_{t-1} - \bar{z}_{t-1})$$

となって、 z_t の過去の情報 \bar{z}_{t-1} が予測の改善に貢献することになる。このように他方の変数の過去の情報が予測の改善を促すかどうかを基準に、因果関係の有無を測るのが Granger の因果の意味である。よって、2 変量の VAR(p) モデル(1)において、Granger の意味で z_t から x_t への因果関係が無いこと（このことを次のように表示する： $z_t \xrightarrow{\text{not } G} x_t$ ）の必要十分条件は、(3)が成立することである。同様に $x_t \xrightarrow{\text{not } G} z_t$ の必要十分条件は、(1)の z_t の式で

$$c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

になることである。ちなみに Granger の意味で z_t から x_t への因果関係が有ることを $z_t \xrightarrow{G} x_t$ と表示する。

そこで2種の確率過程の因果関係には、以下の4種類の状況分類ができる。(1)式にあわせて考えると

$$(i) \quad b_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)、かつ \quad c_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

$$z_t \xrightarrow{G} x_t \text{ および } x_t \xrightarrow{G} z_t : z_t \text{ と } x_t \text{ はフィードバック（互に因果関係にある）}$$

$$(ii) \quad b_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)、かつ \quad c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

$$z_t \xrightarrow{G} x_t \text{ および } x_t \xrightarrow{\text{not } G} z_t : z_t \text{ から } x_t \text{ への一方的因果関係}$$

$$(iii) \quad b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)、かつ \quad c_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

$$z_t \xrightarrow{\text{not } G} x_t \text{ および } x_t \xrightarrow{G} z_t : x_t \text{ から } z_t \text{ への一方的因果関係}$$

$$(iv) \quad b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)、かつ \quad c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

$$z_t \xrightarrow{\text{not } G} x_t \text{ および } x_t \xrightarrow{\text{not } G} z_t : z_t \text{ と } x_t \text{ は無関係}$$

このような因果関係の有無を統計的に調べるには、 z_t から x_t への因果関係が2変量の VAR(p) モ

デル(1)における係数に関する制約と以下のように対応しているので

$$\begin{aligned} z_t &\xrightarrow{\text{not } G} x_t : b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p) \\ z_t &\xrightarrow{G} x_t : \text{いずれかの } k \text{ について } b_k \neq 0 \end{aligned}$$

よって仮説検定では

$$\begin{aligned} H_0 : b_k &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p) \\ H_1 : &\text{いずれかの } k \text{ について } b_k \neq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

を F 統計量によって検定すればよいことになる。まず制約 ($b_k = 0$) 下で(1)の第1式

$$x_t = a_1 x_{t-1} + \dots + a_p x_{t-p} + u_{1t} \quad (5)$$

を最小二乗で推定し、その残差二乗和を RSS_{0x} とする。次に制約を課さない第1式

$$x_t = a_1 x_{t-1} + \dots + a_p x_{t-p} + b_1 z_{t-1} + \dots + b_p z_{t-p} + u_{1t} \quad (6)$$

を最小二乗で推定し、その残差二乗和を USS_{zx} とする。次式から F 値を計算する。

$$F_{0x} = \frac{(RSS_{0x} - USS_{zx})/p}{USS_{zx}/(T-2p)} \quad (7)$$

F_{0x} が $F_{p, T-2p}$ 分布の有意水準 $\alpha\%$ の臨界値より大なら H_0 を棄却し $z_t \xrightarrow{G} x_t$ 、小さければ棄却できないので H_0 を採用し $z_t \xrightarrow{\text{not } G} x_t$ とする。同様に

$$\begin{aligned} H_0 : c_k &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p) \\ H_1 : &\text{いずれかの } k \text{ について } c_k \neq 0 \end{aligned}$$

を F 統計量によって検定すればよい。まず制約 ($c_k = 0$) 下で(1)の第1式

$$z_t = c_1 z_{t-1} + \dots + c_p z_{t-p} + u_{2t}$$

を最小二乗で推定し、その残差二乗和を RSS_{0z} とする。次に制約を課さない第2式

$$z_t = c_1 z_{t-1} + \dots + c_p z_{t-p} + d_1 x_{t-1} + \dots + d_p x_{t-p} + u_{2t}$$

を最小二乗で推定し、その残差二乗和を USS_{xz} とする。 F 値を次式で計算する。

$$F_{0z} = \frac{(RSS_{0z} - USS_{xz})/p}{USS_{xz}/(T-2p)} \quad (8)$$

F_{0z} が $F_{p, T-2p}$ 分布の有意水準 $\alpha\%$ の臨界値より大なら H_0 を棄却し $x_t \xrightarrow{G} z_t$ 、そうでなければ H_0 を採用し、 $x_t \xrightarrow{\text{not } G} z_t$ とする。よって2変量 (x_t, z_t) の場合の Granger の因果関係は先の仮説検定から判断すれば、有意水準 $\alpha\%$ の臨界値 $F_{p, T-2p}$ と各帰無仮説 F_{0z} 、 F_{0x} の大小関係から次のように4つに分類される。

(i) $F_{0x} > F_{p, T-2p}$ かつ $F_{0z} > F_{p, T-2p}$ なら、

$$z_t \xrightarrow{G} x_t \text{ および } x_t \xrightarrow{G} z_t : z_t \text{ と } x_t \text{ はフィードバック}$$

(ii) $F_{0x} > F_{p, T-2p}$ かつ $F_{0z} < F_{p, T-2p}$ なら、

$z_t \xrightarrow{G} x_t$ および $x_t \xrightarrow{notG} z_t$: z_t から x_t への一方的因果関係

(iii) $F_{0x} < F_{p, T-2p}$ かつ $F_{0z} > F_{p, T-2p}$ なら

$z_t \xrightarrow{notG} x_t$ および $x_t \xrightarrow{G} z_t$: x_t から z_t への一方的因果関係

(iv) $F_{0x} < F_{p, T-2p}$ かつ $F_{0z} < F_{p, T-2p}$ なら

$z_t \xrightarrow{notG} x_t$ および $x_t \xrightarrow{notG} z_t$: z_t と x_t は無関係

3. 各種時系列の生成について

各時系列で因果テストを行う前に、その時系列の説明を行う。

① 平均 0、分散 1 の正規乱数

通常ホワイト・ノイズ系列は最も簡単で、重要な弱定常な確率過程である。特に分散は 1 であってもかまわないが、本稿では正規分布に従う乱数を取り上げ、この時系列が基軸となる。それを $u_t = [u_{1t}, u_{2t}]' \sim iid(0, 1)$ 正規とする。すなわち、

$$x_t = u_{t1}, z_t = u_{t2}$$

② 定常な AR(1)モデルに従う時系列

通常ラグ次数が 1 の自己回帰モデル AR(1)は次式で表される。

$$x_t = \mu_1 + \phi_1 x_{t-1} + u_{t1} \quad (9)$$

μ_1 は定数項であるが、定数項が有っても無くても、自己のラグ 1 変数である x_{t-1} の係数 ϕ_1 が、 $|\phi_1| < 1$ なら定常性の条件を満たしている。この式は次のように書き換えられる。

$$x_t = \mu_1 \sum_{i=0}^k \phi_1^i + \sum_{i=0}^k \phi_1^i u_{1t-i} + \phi_1^{k+1} x_{t-k-1}$$

k を ∞ にする状況を考えると、定常性の条件より、初項は一定の値へ、最終項は 0 へ収束する。結局この AR(1)モデルは幾何級数的に減衰する u_{t1} に基づく定常で、反転可能な MA(∞)モデルに従うことになる。本稿の実験では、定数項をゼロ ($\mu_1 = 0$)、初期値をゼロ ($x_0 = 0$) で標本の大きさ $T = 100$ の時系列を生成している。もう一方の時系列 z_t も x_t と同様に生成する。

③ ランダム・ウォークモデルに従う時系列

AR(1)モデルにおいて、定数項ゼロ、 $\phi_1 = 1$ のモデルをランダム・ウォークモデルと呼ぶ。

$$x_t = x_{t-1} + u_{t1}$$

すなわち、先の AR(1) モデル(9)との対比で見れば、 $\mu_1 = 0$ 、 $\phi_1 = 1$ のモデルである。 $\phi_1 = 1$ より定常性の条件は満たさないことから、非定常な時系列となる。このモデルも AR(1) モデルと同様な方式で、次のように書きかえられる。

$$x_t = \sum_{i=0}^k u_{1t-i} + x_{t-k-1}$$

初期値をゼロ ($x_0 = 0$) とすれば、 u_{1t} の累積過程として表される。ランダム・ウォークモデルの期待値はゼロであるから、無限に発散はしないが、どちらの方向へ向かうか不確定な確率過程となる。このことは分散が一定という定常性の条件の1つを充足しないことになる。

④ ドリフト付きランダム・ウォークに従う時系列

ランダム・ウォークモデル $x_t = x_{t-1} + u_{1t}$ は定数項が無いモデルであるが、このモデルに定数項を加えると、ドリフト付きランダム・ウォークモデルになる。

$$x_t = \mu_1 + x_{t-1} + u_{1t}$$

このモデルは、AR(1) モデル(9)式で、 $\mu_1 \neq 0$ 、 $\phi_1 = 1$ とも考えられる。そしてこの定数が上記の書き換えによってトレンドを形成することになる。すなわち、

$$x_t = \mu_1 \sum_{i=0}^k 1^i + \sum_{i=0}^k 1^i u_{1t-i} + 1^{k+1} x_{t-k-1} \quad (10)$$

ここでは、(10) 式右辺第1項が時系列の生成過程で、 $\mu_1 > 0$ ならば、 $1\mu_1, 2\mu_1, \dots, k\mu_1$ と増加していくことになり、非定常時系列となる。

⑤ トренд・モデル

定数項を持つ定常な AR(1) モデル $x_t = \mu_1 + \phi_1 x_{t-1} + u_{1t}$ は定数項 μ_1 を平均とする (μ_1 回りの) 定常時系列である。この μ_1 が時間 t と共に外生的に変化するモデルが、トレンド・モデルと呼ばれるものである。 $\mu_1 = \mu'_1 + \beta_1 t$ と考えれば、次式となる。

$$x_t = \mu'_1 + \beta_1 t + \phi_1 x_{t-1} + u_{1t}$$

この式も次のように書きかえられる。

$$x_t = \mu'_1 \sum_{i=0}^k \phi_1^i + \beta_1 \sum_{i=0}^k \phi_1^i (t-i) + \sum_{i=0}^k \phi_1^i u_{1t-i} + \phi_1^{k+1} x_{t-k-1}$$

この式は、 $|\phi_1| < 1$ であることから、右辺第1項は一定値 $\mu'_1/(1-\phi_1)$ へ収束、第3項は定常な MA(∞) 部分、最終項はゼロへ収束するが、第2項はたとえ $|\beta_1| < 1$ であっても、外生的にトレンドが平均を変化させるために、非定常時系列となる。

これら5つの時系列を同じ $\{u_{1t}\} \sim \text{iid}(0, 1)$ 正規乱数から生成したものを例示する。初期値はゼロとして、生成された標本は $T = 105$ となっている。図1では、X1が①の平均ゼロ、分散1の正規乱数、AR08は②の定常 AR(1) で、定数項無し、 $\mu_1 = 0$ 、 $\phi_1 = 0.8$ で①の系列から生成の時系列、RWは③のランダム・ウォークで①の系列の累積である。①の正規乱数よりも②の AR(1) のほうが変動幅が大きい。③のランダム・ウォークは更に大きな変動を示して発散しているように見えるが、

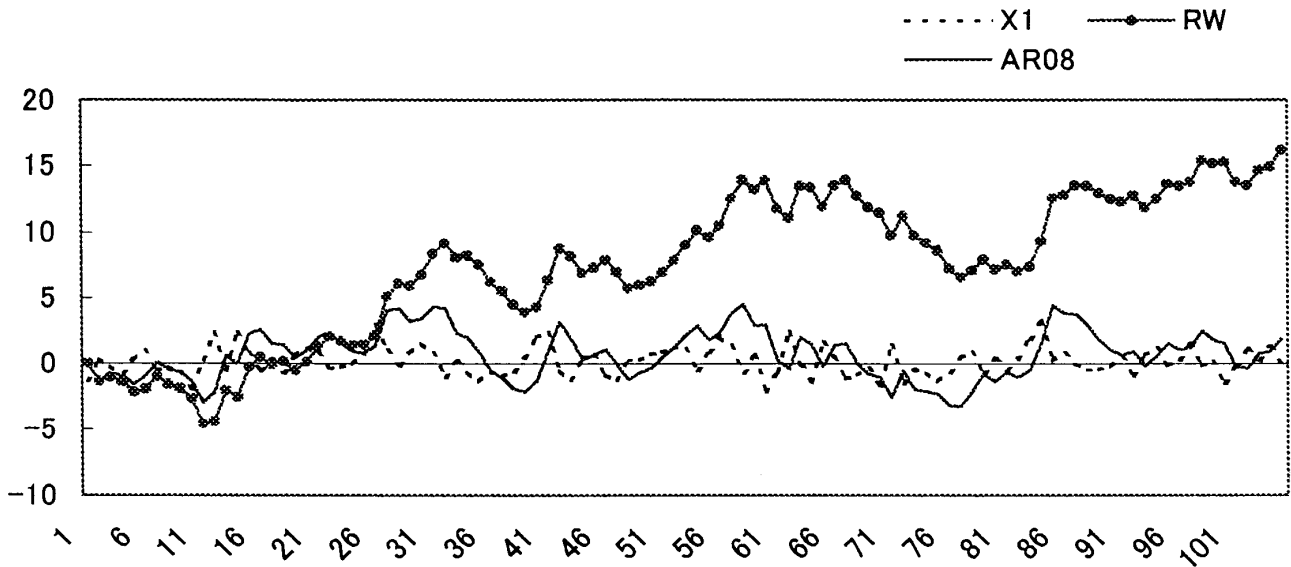


図1: 正規乱数、ランダム・ウォーク、定数項無しの定常 AR(1)

更に計算を続けてサンプル数を増やせばゼロを中心に推移することになる。

図2では、DRWが④のドリフト付きランダム・ウォークである。ここでは $\mu_1 = 0.5$ 、 $\phi_1 = 1$ で①の系列より生成。この時系列は(10)式から第1項は $\mu_1 \sum_{i=0}^{105} 1^i = 0.5 \times 105 = 52.5$ 、第2項 $\sum_{i=0}^{105} 1^i \mu_{1t-i}$ は③のランダム・ウォークの部分で終値は図1から判断すると16あたりであるので、2つの数値をたすことにより67.6の周辺に落ち着くことになる。TA243が⑤のトレンドモデルで、 $\mu'_1 = 2$ 、 $\beta_1 = 0.4$ 、 $\phi_1 = 0.3$ のパラメータ値で①の系列とトレンド(すなわち $t = 1, 2, \dots, 105$)の2つの要因より生成されている。このトレンドモデルの第1項が $\mu'_1 \sum_{i=0}^{105} \phi_1^i \doteq 2/(1-0.3) = 2.857\dots$ 、第2項の終値は少し複雑で $(\dots + 0.32724 + 1.1016 + 3.708 + 12.48 + 42 \doteq 60)$ ほぼ60になる。第3項は定常なMA(∞)部分であるから、第1項と第2項の終値をたせば、63の周辺に落ち着くことになる。ドリフト付きランダム・ウォークモデルに従う時系列は確率的トレンド要因によって無限に増大するが、ト

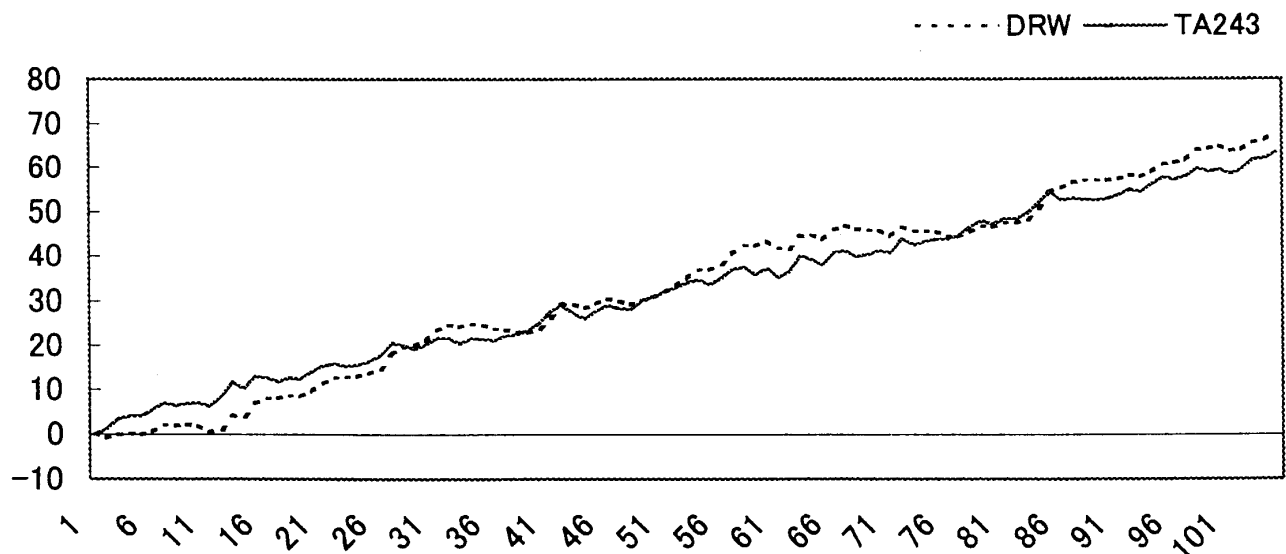


図2: ドリフト付きランダムウォークモデルとトレンドモデル

レンドモデルに従う時系列は確定的トレンド要因によって無限に増大する。その違いは図2のグラフを見るとトレンドモデルの方がより直線的であることに気付く。

これら5つの生成時系列の統計量は次の表1の通りである。生成系列が105と短いためか①の正規乱数は精確に平均ゼロ、分散1にはなっていない。先の時系列の終値は表1の最大値が参考になろう。

表1 5つの生成時系列の統計量

	① X1	② AR08	③ RW	④ DRW	⑤ TA243
平均	0.1532	0.6939	7.3778	33.3778	32.5045
標準偏差	1.0907	1.8704	5.5327	20.2814	17.5359
分散	1.1897	3.4984	30.6107	411.3366	307.5076
尖度	0.0130	-0.6077	-0.8961	-1.1194	-1.1304
歪度	0.4631	0.0590	-0.4551	-0.1569	-0.0187
範囲	5.3718	7.7054	20.7203	68.9993	63.4339
最小	-2.1261	-3.2217	-4.6072	-0.8862	0
最大	3.2457	4.4837	16.1131	68.1131	63.4339
合計	16.0903	72.8592	774.6679	3504.6678	3412.9756
標本数	105	105	105	105	105

4. 因果テスト結果

第3節の図表の5つの生成時系列は1つの例示である。ここでは2変数 x_t 、 z_t それぞれに異なった正規乱数を用いて生成、また毎回(5000回)異なる正規乱数を発生させて、Grangerの因果テストを行っている。実際のテスト形式はラグ2を用いて行った、ラグ5の場合も行ったが結果には大差が生じなかったのをこれを提示する。第2節の(1)式をラグ2で表せば次のようになる。

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + b_1 z_{t-1} + b_2 z_{t-2} + u_{1t}$$

$$z_t = c_1 x_{t-1} + c_2 x_{t-2} + d_1 z_{t-1} + d_2 z_{t-2} + u_{2t}$$

(4)から(7)と(8)を参考にすれば、(7)(8)は標本の大きさが100(先の生成時系列で言えばの6番目の数値~105番目の数値を採用、ここでは $T = 100$ 、 $p = 2$ で計算)で実験計算を行ったので、 F 検定に用いる式は変数 x_t 、 z_t それぞれ具体的には次式で計算する。

$$F_{0x} = \frac{(RSS_{0x} - USS_{zx})/2}{USS_{zx}/(100 - 2 \times 2)}, \quad F_{0z} = \frac{(RSS_{0z} - USS_{xz})/2}{USS_{xz}/(100 - 2 \times 2)}$$

仮説検定では有意水準5%の $F_{2,96}$ の臨界値はほぼ3.09であるから、この値を参照して実際に計算された5000回のテスト計算から得られた F 値から2変数 x_t 、 z_t の因果関係の有無を検定し、4つのケースを分類分けする。すなわち、

- (i) $F_{0x} > 3.09$ かつ $F_{0z} > 3.09$ なら z_t と x_t はフィードバック、
- (ii) $F_{0x} > 3.09$ かつ $F_{0z} < 3.09$ なら $z_t \rightarrow x_t$ への一方的因果関係、

- (iii) $F_{0x} < 3.09$ かつ $F_{0z} > 3.09$ なら $x_t \rightarrow z_t$ への一方的因果関係、
 (iv) $F_{0x} < 3.09$ かつ $F_{0z} < 3.09$ なら z_t と x_t は無関係

である。

実験結果は表2にまとめられている。それぞれ5000回の反復実験を4つに分類分けした回数とその割合(%)である。それと分類分けした範囲内での2変数 x_t 、 z_t の相関係数 r の2乗の平均が計算されている。これは2変数間の正負の相関係数の大きさの代理として計算した。①②は共に独立した定常確率過程同志のテストなので、誤って因果が生じる割合(無関係以外の3分類合計の割合)は10%強と少ない。また、相関係数の平均(実際の表示は r^2 の平均)も小さい。しかし③の共に確率的には独立なランダム・ウォーク変数同志では誤って因果が生じる割合が25%弱と増大する。3分類のいずれの相関係数の平均値も有意な相関係数値以上となっている。④のドリフト付きランダム・ウォーク変数は更に確率的トレンド要因が加わるため、誤って因果関係が生じる割合が40%強と更に増加し、相関係数の平均も絶対値で0.9を超える値になっている。確定的トレンド要因が加わる⑤のトレンドモデル同志では、96%弱がフィードバック因果関係となり、ほぼ100%誤って因果を検出してしまう。そして相関係数もほぼ1になる。

表の最後⑥ TA218は $\mu'_1 = 2$ 、 $\beta_1 = 0.1$ 、 $\phi_1 = 0.8$ のパラメータ値をもつトレンドモデルに従う変数同志の実験結果である。⑤ TA243のトレンドモデルに比べて確定的トレンド要因のパラメータ β_1 の値を0.4から0.1に小さくして、その影響度を弱め、逆に ϕ_1 のパラメータ値を0.3から0.8へと大きくした。

表2 各時系列同志の因果実験結果

x_t と z_t の 因果関係	①正規乱数		r^2 の 平均	②AR08		r^2 の 平均	③RW		r^2 の 平均
	発生数	割合		発生数	割合		発生数	割合	
フィードバック	17	0.3%	0.0106	16	0.3%	0.1122	86	1.7%	0.4099
$z_t \rightarrow x_t$	276	5.5%	0.0106	301	6.0%	0.0852	629	12.6%	0.3776
$x_t \rightarrow z_t$	241	4.8%	0.0086	263	5.3%	0.0756	554	11.1%	0.3748
無関係	4466	89.3%	0.0097	4420	88.4%	0.0367	3731	74.6%	0.1953
合 計	5000	100.0%		5000	100.0%		5000	100.0%	
x_t と z_t の 因果関係	④DRW		r^2 の 平均	⑤TA243		r^2 の 平均	⑥TA218		r^2 の 平均
	発生数	割合		発生数	割合		発生数	割合	
フィードバック	159	3.2%	0.9634	4795	95.9%	0.9923	1516	30.3%	0.9807
$z_t \rightarrow x_t$	949	19.0%	0.9480	106	2.1%	0.9924	1379	27.6%	0.9779
$x_t \rightarrow z_t$	986	19.7%	0.9470	98	2.0%	0.9927	1483	29.7%	0.9777
無関係	2906	58.1%	0.9168	1	0.0%	0.9910	622	12.4%	0.9728
合 計	5000	100.0%		5000	100.0%		5000	100.0%	

注意：表中 $z_t \rightarrow x_t$ や $x_t \rightarrow z_t$ はそれぞれ一方的因果関係を表示している。

実験結果は確定的トレンド要因が相対的に弱まったことによりフィードバック関係が30%と減少、その分その他の分類への割合が増える結果となった。以上のGranger因果テストの実験結果を概観すると非定常時系列同志では見せかけの因果関係が生じる。特にトレンドに基づく相関が強くなればらるほどその傾向が強くなる。また、各ケースにおける4分類ではフィードバック関係になる場合ほど相関が強いことが分かった。しかし相関の強さだけを指標とはできないようである。後半の実験では、④DRW、⑤TA243、⑥TA218は共に強い相関を示しているが、その結果はかなり異なる。同じトレンドに基づく相関の強さであっても、その生成が確率的トレンド要因に基づくものか確定的トレンド要因に基づくかによって見せかけの因果が生じる度合いは異なる。実験結果は確定的トレンド要因が強いほど見せかけの因果となるようである。表の3は $\mu'_1 = 0, \beta_1 = 0.6, \phi_1 = 0$ のパラメータ値をもつ確定的トレンド t と μ_t のみで生成された時系列同志の実験結果である。この実験ではすべての実験で見せかけの因果となっている。

次の実験は追加的なものである。生成された時系列が互いに異なる場合にどのような見せかけの因果が生じるかが試されている。最初は定常AR(1)モデルである②AR08の時系列とランダム・ウォークモデルである③RWの時系列で、それぞれ x_t と z_t の変数に対応している。このケースの実験では見せかけの因果の発生パターンは表2の②AR08の時系列同志の結果と似ているが、相関はそれぞれの分類ごとで少し強くなる。次の③RW x_t と④DRW z_t 同志の実験は今までと異なるパターンを示す。今まで同じ時系列同志では、因果の方向を示す $z_t \rightarrow x_t$ (すなわち z_t から x_t への一方的因果)と $x_t \rightarrow z_t$ (すなわち x_t から z_t への一方的因果)の割合がほぼ同じあったのが、変数 z_t の④DRWから変数 x_t の③RWへの一方的因果($z_t \rightarrow x_t$)が相対的に強くなっている。この傾向は④DRW x_t と⑤TA243 z_t 同志の実験結果でも $z_t \rightarrow x_t$ への因果が強い傾向を示している。このことは相関係数の強さで言えば、トレンドが強い変数からより弱い変数への因果が生じることを示している。

表3 完全なトレンドモデル同志の因果

x_t と z_t の 因果関係	完全トレンドモデル		r^2 の 平均
	発生数	割合	
フィードバック	4942	98.8%	0.9967
$z_t \rightarrow x_t$	31	0.6%	0.9964
$x_t \rightarrow z_t$	27	0.5%	0.9972
無関係	0	0.0%	
合計	5000	100.0%	

表4 異なる時系列同志の因果実験結果

x_t と z_t の 因果関係	AR08とRW		r^2 の 平均	RWとDRW		r^2 の 平均	DRWとTA243		r^2 の 平均
	発生数	割合		発生数	割合		発生数	割合	
フィードバック	26	0.5%	0.1712	69	1.4%	0.5891	487	9.7%	0.9812
$z_t \rightarrow x_t$	361	7.2%	0.1831	1122	22.4%	0.6329	1366	27.3%	0.9668
$x_t \rightarrow z_t$	336	6.7%	0.0785	299	6.0%	0.4259	507	10.1%	0.9758
無関係	4277	85.5%	0.0558	3510	70.2%	0.3572	2640	52.8%	0.9503
合計	5000	100.0%		5000	100.0%		5000	100.0%	

5. 結語

本稿で行った Granger の因果テストは平均ゼロ、分散 1 の正規乱数から生成された確率的には互いに独立の定常時系列同志間あるいは非定常時系列同志間に生じる見せかけの因果関係テストである。この実験はそれぞれ 5000 回のモンテ・カルロ実験からまとめられた。実験結果は互いに独立的な時系列であっても、それが非定常時系列であれば、見せかけの因果は生じる。元々 Granger の因果テストは定常時系列間を前提としたものであるから、このような結果は予想の範囲であった。その意味では非定常な経済データを定常化処理するのに、それが不十分である場合は注意しなければならない。非定常時系列間に生じる見せかけの因果は一律ではない。その生じる割合はランダム・ウォークモデルよりもドリフト付きランダム・ウォーク、ドリフト付きランダム・ウォークよりもトレンドモデルのほうが多くなるというものである。このことから(1)非定常の主要要因であるトレンドが共に介在しての見せかけの因果が発生する、(2)非定常時系列同志間ではトレンド要因が強くなるにつれて、しかも確率的トレンド要因よりも確定的トレンド要因の強いほうが見せかけの因果が生じる割合が大きくなる、と判断することができる。また(3)生成された時系列が2変数間で異なる場合にどのようなパターンの見せかけの因果が生じるかという追加的な実験で確認されたことは、トレンドが強い変数からより弱い変数への因果が生じるということであった。

参考文献

山本拓 (1988) 『経済の時系列分析』 創文社。

Granger, C.W. (1969), "Investigating Causal Relations by Econometric models and Cross-Spectral Methods," *Econometrica*, 37, 423-438.

Granger, C.W.J., and P. Newbold (1974), "Spurious Regressions in Econometrics," *Journal of Econometrics*, 2, 111-120.

Nelson, C.R. and C.I. Plosser (1982) "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series ; Some Evidence and Implication," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 10, 139-162.

Phillips, P.C. B (1986), "Understanding Spurious Regressions in Econometrics," *Journal of Econometrics*, 33, 311-340.